CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

1978

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(durée : 3 heures - Coefficient : 9)

---==oOOo==---

Les deux problèmes de la composition sont indépendants.

---==oOOo==---

PREMIER PROBLEME

1. - Soit A une matrice carrée d'ordre n sur un corps commutatif K.

   - Soit A_1 la matrice obtenue en remplaçant dans A les k dernières lignes par k lignes de zéro $(0 < k < n)$
   - Soit A_2 la matrice obtenue en remplaçant dans A les k dernières colonnes par k colonnes de zéro $(0 < k < n)$

   Montrer que A_1 et A_2 ont même polynôme caractéristique.

2. - Soit E un K espace vectoriel de dimension finie.

   Si u et v sont deux endomorphismes de E, montrer que $u \circ v$ est un automorphisme de E si, et seulement si, u et v sont des automorphismes de E.

3. - u et v étant deux endomorphismes quelconques, λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$, $\vec{x}$ un vecteur propre correspondant, montrer que $v(\vec{x})$ est un vecteur propre de $v \circ u$.

4. - Déduire des 2 questions précédentes que, u et v étant toujours 2 endomorphismes quelconques, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

5. - Retrouver que les 2 matrices A_1 et A_2 de la première question ont mêmes valeurs propres en remarquant qu'il existe une matrice P telle que :

$$A_1 = P.A \qquad A_2 = A.P$$

.../...

DEUXIEME PROBLEME

Soit M l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur le corps des réels, muni des structures classiques d'espace vectoriel ($\mathbb{R}$ espace vectoriel, addition des matrices, multiplication des matrices par un réel) et d'anneau (addition des matrices, multiplication interne classique).

I est la matrice unité de la multiplication, donc :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

J est une matrice de M, fixée dans tout le problème et vérifiant les 2 propriétés :

a) J est une matrice symétrique

b) J vérifie $J^2 = I$

J permet de définir une application φ de M dans M par :

$$\varphi(A) = J.{}^tA.\ J$$

A étant une matrice quelconque de M, ${}^tA$ la matrice transposée de A ; on notera $\varphi(A) = A^*$

On a donc :

$$M \xrightarrow{\ \varphi\ } M$$

$$A \longmapsto \varphi(A) = A^* = J.{}^tA.\ J$$

1. - Montrer que φ est un automorphisme d'espace vectoriel
[on pourra former $(A^*)^*$]

2. - Montrer que si A est une matrice orthogonale, $\varphi(A)$ est aussi orthogonale.

3. - On considère maintenant le sous-ensemble G des matrices de M vérifiant :

$$\varphi(A).A = I$$

Montrer que l'ensemble G, avec la loi de multiplication des matrices, a une structure de groupe.

Montrer que si $A \in G$, alors ${}^tA \in G$

.../...

4. - Dans tout ce qui suit, on prend pour J la matrice diagonale :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire la matrice diagonale dont tous les termes de la diagonale sont égaux à 1, sauf le dernier terme qui est (-1).

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension n rapporté à une base ; soit u un endomorphisme de E dont la matrice (par rapport à la base de E considérée) appartient à G.

Montrer que u conserve la forme quadratique définie sur E par :

$$\psi(\vec{x}) = x_1^2 + \ldots\ldots\ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2$$

$\vec{x}$ étant un vecteur de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$

[C'est-à-dire que si $\vec{y} = u(\vec{x})$, on a $\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{y})$]

5. - J étant toujours la matrice précédente

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

G le groupe précédent correspondant à J.

Soit A une matrice de G ; on notera $a_{i,j}$ l'élément de A situé dans la ligne i et la colonne j.

Montrer que $A \in G$ entraîne

$$a_{n,n}^2 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad a_{n,n}^2 > a_{1,n}^2 + a_{2,n}^2 + \ldots\ldots + a_{n-1,n}^2$$

6. - Soit G_1 le sous-ensemble de G formé par les matrices de G vérifiant $a_{n,n} \geqslant 1$

Montrer que G_1 est un sous-groupe de G.

On pourra utiliser :

a) le résultat : si une matrice appartient à G, sa transposée appartient à G.

b) l'inégalité classique sur les réels :

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots. + \alpha_p^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \ldots. + \beta_p^2} \geqslant \left|\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots. + \alpha_p \beta_p\right|$$

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail